$$
\begin{cases}
\omega^3 = 0, \quad \omega^3_3 = 0, \quad \omega^2_3 = -\theta^2, \; -\omega^1_3 = \Gamma^1_3\theta^1, \; \omega^{i+1}_1 = \Gamma^{i+1}_1\theta^1, \\
\omega^3_2 = \Gamma^3_2\theta^2, \; \omega^1_1 = \Gamma^1_{1a}\theta^a, \quad \omega^1_2 = \Gamma^1_{2i}\theta^i, \quad d\alpha = \alpha_a\theta^a, \\
d\gamma = \gamma_a\theta^a \quad (i = 1,2;\; a = 1,2,3).
\end{cases} \tag{2}
$$

Вырожденные комплексы $(QP^*)_{3,1}$ существуют и определяются с произволом трех функций трех аргументов.

Получены следующие результаты: 1) торсы прямолинейных конгруэнций (AA_a) высекают на поверхности (P) сеть линий Γ_{p*}, Γ, где Γ – линии, огибаемые прямыми AA_1; 2) линии Γ_{p*} являются на поверхности (P) линиями тени; 3) характеристические точки координатных плоскостей инцидентны прямой AA_3; 4) линии Γ_{p*}, Γ образуют на поверхностях $(P),(F_{32})$ сопряженную сеть, где $\bar F_{32} = \bar A - \frac{1}{\Gamma^1_3}\bar e_3$ – фокальная точка луча прямолинейной конгруэнции (AA_3), касательные к линиям Γ_{p*}, Γ в точке F_{32} проходят через фокусы луча прямолинейной конгруэнции (AA_2); 5) соприкасающаяся плоскость линии Γ_{p*} в точке P является касательной плоскостью к фокальной поверхности прямолинейной конгруэнции (AA_2), образованной точкой $\bar F_{22} = \bar A - \frac{1}{\Gamma^1_{21}}\bar e_2$; 6) существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AA_3) к семейству касательных плоскостей к поверхности (P); 7) если соприкасающаяся плоскость линии Γ_{p*} в точке P проходит через соответствующую точку P^*, то поверхность (P) расслаивается на семейство плоских линий Γ_{p*}, фокальные поверхности (F_{32}) и (F_{22}) являются в этом случае торсами; 8) линии Γ_{p*} являются прямыми тогда и только тогда, когда они – асимптотические линии на поверхности (P).

В силу поставленной задачи точка P^* является фокальной точкой комплекса квадрик Q и конгруэнции квадрик Q_{P^*}. Если многообразие точек A_1 двумерное $(\Gamma^1_{13} = 0)$, то характеристическое многообразие комплекса квадрик Q [2] инцидентно двум плоскостям $x^2 = 0$, $x^1(\alpha - \alpha_3) + x^3(\gamma - \gamma_3) - x^2 = 0$ и определяется системой уравнений:

$$
\begin{cases}
Q_1 \equiv (x^1)^2(\alpha\Gamma^2_1 - \Gamma^1_{11}) + x^1x^2(\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_1 - \alpha_1 + \alpha\Gamma^1_{11} + \gamma\Gamma^3_1) + x^1x^3(\gamma\Gamma^2_1 - \Gamma^1_3 - \Gamma^3_1) + \\
\quad + x^2x^3(\alpha\Gamma^1_3 - \gamma_1) - x^1 + \alpha x^2 + \alpha\Gamma^1_{21}(x^2)^2 = 0, \\
Q_2 \equiv -\Gamma^1_{12}(x^1)^2 + x^1x^2(\alpha\Gamma^1_{12} - \alpha_2 - \Gamma^1_{22}) - \alpha x^1x^3 + x^2x^3(1 - \Gamma^3_2 - \gamma_2) + \\
\quad + \alpha x^1 - x^2 + \gamma x^3 + (x^2)^2(\alpha\Gamma^1_{22} + \gamma\Gamma^3_2) - \gamma(x^3)^2 = 0, \\
Q_3 \equiv x^2(x^1(\alpha - \alpha_3) + x^3(\gamma - \gamma_3) - x^2) = 0.
\end{cases} \tag{3}
$$

Q_1, Q_2, Q_3 – коэффициенты в разложении $dQ = Q_1\theta^1 + Q_2\theta^2 + Q_3\theta^3$.

Каждой точке P^* линии (P^*) соответствуют конгруэнции коник (C_a), полученных при пересечении квадрики Q координатными плоскостями $x^a = 0$:

C_1: $(x^2)^2 + (x^3)^2 - 2\gamma x^2x^3 - 1 = 0$, $x^1 = 0$;

C_2: $(x^1)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0$, $x^2 = 0$;

C_3: $(x^1)^2 + (x^2)^2 - 2\alpha x^1x^2 - 1 = 0$, $x^3 = 0$.

Конгруэнции (C_a) определяются системой уравнений (2) и условием $\theta^1 = 0$.

Доказано, что точки A_3 и $\bar A'_3 = \bar A - \bar e_3$ являются сдвоенными фокальными точками коники C_1, точки пересечения прямой $x^1 = 0$, $x^2 - x^3(\gamma - \gamma_3) = 0$ с коникой C_1 также являются фокальными точками.

Для коники C_2 точки A_3, A'_3 являются трехкратными фокальными точками.

Фокальными точками коники C_3 являются точки A_1 и $\bar A'_1 = \bar A - \bar e_1$.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1973. Вып.3. С.41-49.

2. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.6. С.113-133.

УДК 514.75

О ЦЕНТРАЛЬНО-ПРОЕКТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

М.А. Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

В евклидовом пространстве E_n рассматриваются две m-поверхности $M, \bar M$ и диффеоморфизм $f: M \to \bar M$. Исследуется случай, когда f – центральное проектирование.

1. Пусть $M, \bar M$ – гладкие m-поверхности, $\mathfrak{F}(M)$ есть R-алгебра дифференцируемых на M функций, $T^r_s(M)$ обозначает $\mathfrak{F}$-модуль дифференцируемых тензорных полей на M типа (r,s), $\tilde\nabla$ –

дифференцирование в E_n.

Формулы Гаусса-Вейнгартена [1] для поверхности M запишутся в виде

$$\tilde\nabla_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y),\ \tilde\nabla_X \eta = -A_\eta X + \nabla^\perp_X \eta, \tag{1}$$

где $X,Y \in T^1_0(M)$, ∇ - связность Леви-Чивита, $\nabla^\perp$ - нормальная связность, $A_\eta \in T^1_1(M)$, α - вторая фундаментальная форма m-поверхности M, $\eta \in T^\perp M$.

2. Обозначим $\vec{pq} = \ell_p,\ p\in M,\ q = f(p)$. Тогда отображение $f: M \to \overline{M}$ запишется в виде

$$q = p + \ell_p. \tag{2}$$

Через $df X_p$ обозначим вектор, полученный путем параллельного переноса вектора $df X_p \in T_q\overline{M}$ (в связности $\tilde\nabla$) в точку P. Тогда получим

$$\underline{df} X = X + \tilde\nabla_X \ell. \tag{3}$$

Пусть $\ell = a + \xi,\ a \in TM,\ \xi \in T^\perp M$. Тогда из (1), (3) имеем

$$\underline{df} X = FX + \omega X, \tag{4}$$

где

$$\begin{cases} FX = X - A_\xi X + \nabla_X a, \\ \omega X = \alpha(X,a) + \nabla^\perp_X \xi, \end{cases} \tag{5}$$

причем $FX_p \in T_p M$, $\omega X_p \in T^\perp_p M$.

3. Пусть m-поверхности $M, \overline{M}$ - центрально-проектируемые. Тогда существует неподвижная точка $C = p + t\ell$. Полагая $\tilde\nabla_X C = 0$ и используя (3), получим

$$\begin{cases} FX = kX - \varphi(X)a,\ k = \frac{t-1}{t}\ (t \neq 0,1), \\ \varphi(X) = X \ln t,\quad \omega X = -\varphi(X)\xi. \end{cases} \tag{6}$$

Так как

$$\vec{cq} = k\vec{cp}, \tag{7}$$

то из (4), (6), (7) вытекает

Т е о р е м а 1. Если m-поверхности $M, \overline{M}$ -центрально-проектируемые и $\ell \in TM$, то следующие утверждения эквивалентны: 1) касательные m-плоскости к m-поверхностям $M, \overline{M}$ в соответствующих точках параллельны; 2) $\varphi = 0$; 3) отображение $f: M \to \overline{M}$ - гомотетия.

Если $f: M \to \overline{M}$ не гомотетия, то на m-поверхностях $M, \overline{M}$ определятся $(m-1)$-распределения

$$\Delta^\varphi:\ \varphi(X) = 0,\quad \overline{\Delta}^\varphi = df\Delta^\varphi,$$

причем инволютивные.

Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 2. Если $M, \overline{M}$ - центрально-проектируемые m-поверхности и отображение $f: M \to \overline{M}$ не является гомотетией, то: 1) $M, \overline{M}$ расслаиваются на $(m-1)$-поверхности $N \subset M$, $\overline{N} = f(N)$, касательные $(m-1)$-плоскости которых в соответствующих точках параллельны; 2) отображение $f: N \to \overline{N}$ при $m>2$ - гомотетия.

Рассмотрим квадратичную форму $\underline{g}(X,Y) = (\underline{df}X, \underline{df}Y)$, индуцируемую на M отображением f из квадратичной формы (dfX, dfY) поверхности m.

В силу (4), (6) имеем

$$\underline{g}(X,Y) = g(FX,FY) + g^\perp(\omega X, \omega Y),$$

или

$$\underline{g}(X,Y) = k^2 g(X,Y) + \varphi(X)\nu(Y) + \varphi(Y)\nu(X), \tag{8}$$

где

$$\begin{cases} \nu(X) = -k g(X,a) + \frac{1}{2}\varphi(X)\ell, \\ \ell = (a,a) + (\xi,\xi) = |\ell|^2. \end{cases} \tag{9}$$

Так как ранг квадратичной формы

$$\psi(X,Y) = \varphi(X)\nu(Y) + \varphi(Y)\nu(X)$$

не больше двух, то при $m>2$ она не может быть метрикой на M. Таким образом, при $m>2$ имеет место

Т е о р е м а 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) $f: M \to \overline{M}$ - конформное отображение; 2) $\psi = 0$.

Введем в рассмотрение векторы d, m:

$$\varphi(X) = g(X,d),\quad \nu(X) = g(X,m).$$

Откуда

$$m = -ka + \frac{\ell}{2} d. \tag{10}$$

Исследуем равенство

$$\psi = \varphi \otimes \nu + \nu \otimes \varphi = 0.$$

Возможны случаи:

1) $\varphi = 0$, отображение $f: M \to \overline{M}$ - гомотетия;

2) $\varphi \neq 0, \nu = 0$, тогда $d = \frac{2k}{\ell} a$ и распределение Δ^φ ортогонально a;

3) $\varphi = 0, \nu = 0$, отображение $f: M \to \overline{M}$ - гомотетия и поле ℓ есть поле нормалей к m-поверхности M.

Библиографический список

1. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 414 с.